Corrigés des exercices de 4.28 à 4.35 — حلول التمارين من 4.28 إلى 4.35

Exercice 4.28 :

Soit $\vec{v}_a$ la vitesse de précipitation de la pluie par rapport au sol, $\vec{v}$ la vitesse de la pluie par rapport au véhicule et $\vec{v}_e$ la vitesse de la voiture par rapport au sol :

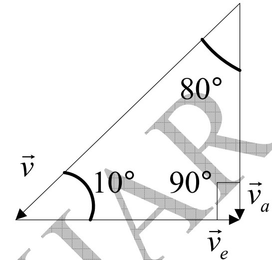
Représentons les trois vecteurs puis appliquons la loi des sinus:

La vitesse de précipitation de la pluie par rapport à la voiture au repos est:

$$\frac{v_a}{\sin 10°} = \frac{v_r}{\sin 90°} \Rightarrow \boxed{v_a = \frac{\sin 10°}{\sin 90°} v_r} \quad ; \quad \boxed{v_a \simeq 17,4 km.h^{-1}}$$

La vitesse de précipitation de la pluie par rapport à la voiture en mouvement est:

$$\frac{v_r}{\sin 90°} = \frac{v_e}{\sin 80°} \Rightarrow \boxed{v_r = \frac{\sin 90°}{\sin 80°} v_e} \quad ; \quad \boxed{v_r \simeq 117 km.h^{-1}}$$



Exercice 4.29 :

1/ l'équation horaire de la chute de la balle par rapport au repère fixe est : $z = -\frac{1}{2}gt^2 + h \rightarrow (1)$

La distance parcourue par la voiture avec une vitesse constante au cours de la durée t est : $x' = vt \rightarrow (2)$

z' est la hauteur dans le repère mobile lié à la voiture et qui est la même que la hauteur z mesurée dans le repère fixe z .

Par élimination du temps entre les équations horaires (1) et (2) on obtient l'équation de la trajectoire de la balle par rapport au repère mobile :

$$t = \frac{x'}{v} \Rightarrow \boxed{z = z' = -\frac{g}{2v^2}x'^2 + h}$$ **: la trajectoire est une parabole.**

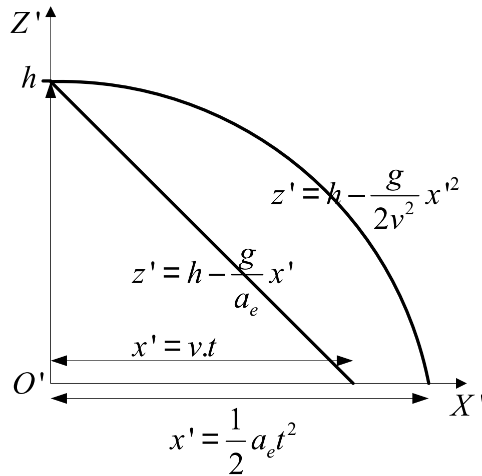
2/ La distance parcourue par le véhicule avec un mouvement uniformément varié au cours de la durée t est :

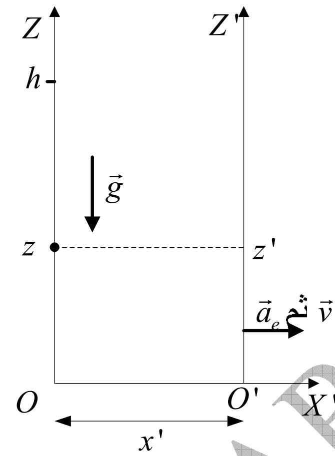
$$x' = \frac{1}{2}a_e t^2 \rightarrow (3)$$

En éliminant le temps entre les équations (1) et (3) on obtient la trajectoire de la balle par rapport au repère mobile :

$$t^2 = \frac{2x'}{a_e} \Rightarrow \boxed{z = z' = -\frac{g}{a_e}x' + h}$$ **: la trajectoire est une droite.**

Nous avons représenté sur la figure ci-dessous la trajectoire pour chaque cas.





Exercice 4.30 :

Nous étudions le mouvement de M dans la bas $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Les vecteurs unitaires sont indépendantes du temps. Voir figure.

1/ Le vecteur position : $\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{r}\,' = r.\vec{u}_r}$, le vecteur vitesse relative : $\boxed{\vec{v}_r = \dot{r}.\vec{u}_r}$ et le vecteur accélération relative : $\boxed{\vec{a}_r = \ddot{r}.\vec{u}_r}$.

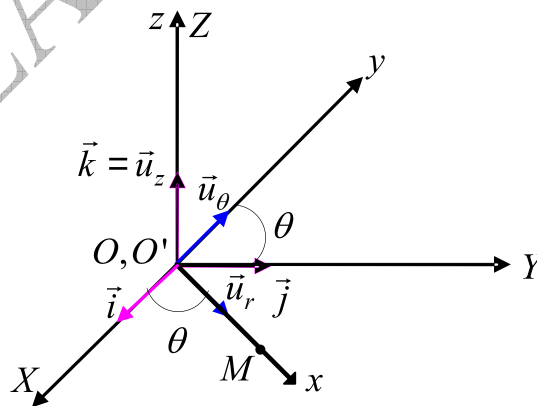
2/ La vitesse d'entraînement, c'est-à-dire la vitesse des deus axes Oxy mobiles par rapport au plan fixe est OXY :

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = 0 \quad (O \equiv O')$$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k} = \dot{\theta}.\vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_e = r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta}$$



L'accélération d'entraînement, c'est-à-dire l'accélération des deux axes Oxy mobiles par rapport au plan fixe OXY est :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} \quad , \quad \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = \dot{\theta}.\vec{u}_z \wedge r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \ddot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{a}_e = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

3/ L'accélération de Coriolis :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r = 2.\begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ \dot{r} & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta}$$

4/ La vitesse absolue, c'est-à-dire la vitesse de M par rapport au plan OXY fixe est :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a = \dot{r}.\vec{u}_r + r\dot{\theta}.\vec{u}_\theta}$$

L'accélération absolue c'est-à-dire l'accélération de M par rapport au plan fixe OXY est :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right).\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right).\vec{u}_\theta}$$

❖ **Remarque : Si on veut faire les calculs par rapport au repère mobile, on utilise la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, en remplaçant $\vec{u}$ et $\vec{u}_\theta$ dans les résultats des vitesses et des 'accélérations auxquelles nous sommes parvenues par $\vec{u}_r = \vec{i}.\cos\theta + \vec{j}.\sin\theta$ et $\vec{u}_\theta = -\vec{i}.\sin\theta + \vec{j}.\cos\theta$.**

Exercice 4.31 :

1/ Expression du vecteur position par rapport au repère mobile $OX'Y'$:

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \vec{r} = r.\vec{i}' \\ \vec{i}' &= \vec{u}_r\end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{r} = \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right).\vec{u}_r}$$

On dérive le vecteur position dans la base mobile pour obtenir le vecteur vitesse relative :

$$\boxed{\vec{v}_r = \dot{\vec{r}} = at.\vec{u}_r}$$

Expression du vecteur de la vitesse d'entraînement :

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}_e &= \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} \\ \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} &= 0 \quad \left(O\equiv O'\right) \\ \vec{\omega} &= \omega\vec{k} = \omega.\vec{u}_z\end{aligned}\right| \Rightarrow \vec{v}_e = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ \frac{1}{2}at^2 + r_0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{v}_e = \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega.\vec{u}_\theta}$$

Expression du vecteur de la vitesse absolue :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a = at.\vec{u}_r + \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega.\vec{u}_\theta}$$

Son module : $\boxed{v_a = \sqrt{(at)^2 + \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)^2 .\omega^2}}$

Le sens et la direction du vecteur de la vitesse absolue (voir figure ci-dessous) est donnée par :

$$\boxed{tg\alpha = \frac{v_\theta}{v_r} = \frac{\left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega}{at}}$$

2/ Coordonnées et viteses du mobile au temps $t = 3s$:

$$\theta = \omega t \ , \ \boxed{\theta = 1,884 rad = 108°} \ ; \ r = \frac{1}{2}at^2 + r_0 \ , \ \boxed{r = 0,1m}$$

$$x = r.\cos\theta \ , \ \boxed{x = -0,031m} \ ; \ y = r.\sin\theta \ , \ \boxed{y = 0,095m}$$

$$v_r = at \ , \ \boxed{v_r = 0,06m.s^{-1}} \ ; \ v_e = \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega \ , \ \boxed{v_e = 0,0628m.s^{-1}}$$

3/ On dérive le vecteur de la vitesse relative pour obtenir le vecteur de l'accélération relative :

$$\vec{a}_r = a.\vec{i}' = a.\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{a}_r = a.\vec{u}_r}$$

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} \ , \ \boxed{v_a = 0,087m.s^{-1}}$$

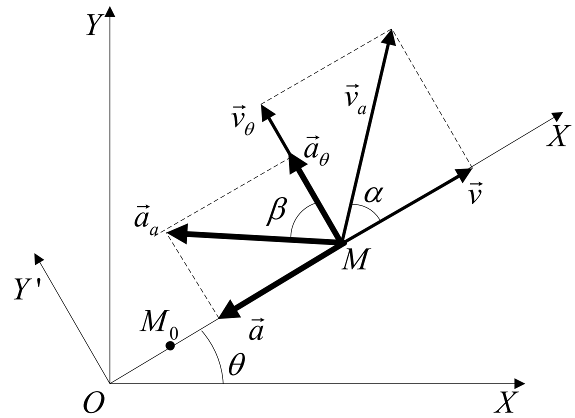
$$tg\alpha = \frac{v_\theta}{v_r} = 1,047 \Rightarrow \boxed{\alpha = 46,3°}$$

L'accélération d'entraînement :

$$\vec{a}_e = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}}_{0} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{0} \quad , \quad \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{a}_e = \vec{\omega} \wedge \left(\underbrace{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\vec{v}_e}\right)$$

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \omega.\vec{u}_z \wedge \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega.\vec{u}_\theta = -r\omega^2\vec{u}_r \Bigg| \Rightarrow \boxed{\vec{a}_e = -\left(\underbrace{\frac{1}{2}at^2 + r_0}_{\vec{r}}\right)\omega^2.\vec{u}_\theta}$$



3/ Accélération de Coriolis : $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r = 2.\begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ at & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = 2at\omega.\vec{u}_\theta}$

Expression littérale de l'accélération absolue :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = \left[a - \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega^2\right].\vec{u}_r + \left(2at.\omega\right).\vec{u}_\theta}$$

Module de l'accélération absolue : $\boxed{a_a = \sqrt{\left[a - \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega^2\right]^2 + \left(2at.\omega\right)^2}}$

La direction du vecteur accélération absolue est tirée de la figure ci-dessus :

$$\boxed{tg\beta = \frac{a_\theta}{a_r} = \frac{2at}{a - \left(\frac{1}{2}at^2 + r_0\right)\omega}}$$

Exercice 4.32 :

1/ **Coordonnées du point M :** à partir de la figure (a) ci-dessous on voit que:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$

L'abscisse : au cours de la durée t, le point M balaie l'angle $-\omega t$, et sa position est définie par l'angle $\theta = -\frac{\pi}{2} - \omega t$; Pendant le même temps le centre du cercle parcoure la distance $\overline{OA'} = vt$. Donc : $x = \overline{OA'} + x'_M$.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{OA'} = v.t = R\omega t \\ x'_M = R.\cos\theta \\ \cos\theta = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \omega t\right) \\ \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = -\sin\omega.t \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{x = R\left(\omega.t - .\sin\omega.t\right)}$$

L'ordonnée : de la figure (a) on voit que : $y = R + y'_M$

$$\left.\begin{array}{l} y = R + R.\sin\theta \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \omega.t\right) = -\cos\omega.t \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{y = R\left(1 - .\cos\omega t\right)}$$

La trajectoire est la courbe décrite par l'extrémité du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ au cours du temps. Il est défini par les équations paramétriques :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = R\left(\omega t - \sin\omega t\right) \\ y = R\left(1 - \cos\omega t\right) \\ z = 0 \end{cases}$$

La représentation graphique de ces équations paramétriques nous conduit à une **cycloïde** **(منحنى دويري)**.

2/ La vitesse absolue du point M est :

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{v}_a \begin{cases} \dot{x} = v_x = R\omega\left(1 - \cos\omega t\right) \\ \dot{y} = v_y = R\omega\sin\omega t \\ \dot{z} = v_z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R\omega\left(1 - \cos\omega t\right).\vec{i} + R\omega\sin\omega t.\vec{j}}$$

Le module du vecteur vitesse absolue est :

$$v_a = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ ;\ v_a = \sqrt{\left[R\omega\left(1 - \cos\omega t\right)\right]^2 + \left[R\omega\sin\omega t\right]^2}$$

$$v_a = \sqrt{2R^2\omega^2\left(1 - \cos\omega t\right)}$$

$$v_a = R\omega\sqrt{2\left(\underbrace{1 - \cos\omega t}_{2.\sin^2\frac{\omega t}{2}}\right)} = R\omega\sqrt{2.2\left(\sin^2\frac{\omega t}{2}\right)} \Rightarrow \boxed{v_a = 2R\omega\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|}$$

Pour déterminer la direction du vecteur vitesse absolue il suffit de calculer l'angle α comprise entre l'axe OX , c'est-à-dire le vecteur unitaire $\vec{i}$, et le vecteur $\vec{v}_a$ (voir figure b) ci-dessous. Pour ce faire on fait appel au produit scalaire :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_a.\vec{i} = v_a.i.\cos\alpha = \dot{x} \\ \dot{x} = v_a.\cos\alpha \\ \dot{x} = 2R\omega\left(1 - \cos\omega t\right) \end{array}\right| \Rightarrow v_a.\cos\alpha = 2R\omega\left(1 - \cos\omega t\right)$$

Par substitution on obtient :

$$2R\omega.\sin\frac{\omega t}{2}.\cos\alpha = R\omega\left(1 - \cos\omega t\right)$$

En continuant les calculs on obtient la valeur α :

$$\left.\begin{array}{l} 2R.\sin\frac{\omega t}{2}.\cos\alpha = 2R.\sin^2\frac{\omega t}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \sin\frac{\omega t}{2} \\ \cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\alpha = \cos\left(-\alpha\right) \end{array}\right| \Rightarrow \alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{\omega t}{2}\quad ,\quad \boxed{\alpha = \left|\frac{\pi}{2} - \frac{\omega t}{2}\right|}$$

La vitesse relative est la vitesse absolue du point M par rapport au référentiel mobile $X'AY'$, donc :

$$\vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}$$

Commençons par les coordonnées du point M dans le repère $X'AY'$:

$$x'_M = R.\cos\theta = R.\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = -R.\sin\omega t$$

$$y'_M = R\sin\theta = R.\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = -R.\cos\omega t$$

En dérivant les deux coordonnées par rapport au temps on obtient les composantes de la vitesse relative :

$$\boxed{\dot{x}'_M = -R.\omega s\cos t} \quad ; \quad \boxed{\dot{y}'_M = -R.\omega.\sin\omega t}$$

Le vecteur s'écrit alors : $\boxed{\vec{v}_r = -R.\omega s\cos t.\vec{i} - -R.\omega.\sin\omega t.\vec{j}}$

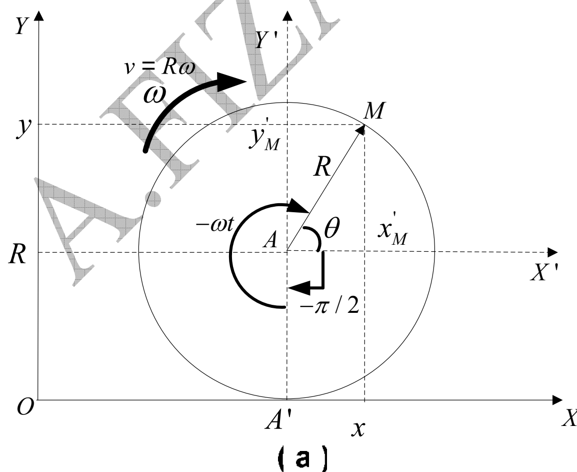
Et son module : $v_r = \sqrt{(R.\omega s\cos t)^2 + (R.\omega.\sin\omega t)^2} \Rightarrow \boxed{v_r = R\omega}$

La direction de la vitesse relative : on utilise la même méthode que celle qui a été utilisée pour obtenir la direction du vecteur vitesse absolue.

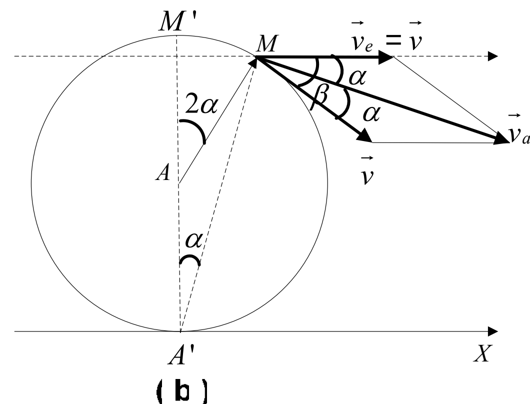
Sur la figure (b) ci-dessous, on voit bien que l'angle en question est l'angle compris entre $\vec{v}$ et $\vec{i}$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r.\vec{i} = v_r.i.\cos\beta \\ v_r.\cos\beta = \dot{x}'_M = -\underbrace{R\omega}_{v_r}\cos\omega t \\ -\cos\omega t = \cos(\pi - \omega t) \end{array}\right| \Rightarrow \cos\beta = -\cos\omega t \quad ; \quad \boxed{\beta = \pi - \omega t = 2\alpha}$$

3/ la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$. Regardons la figure (b) ci-dessous (en se basant sur quelques propriétés géométriques). Dans un cercle l'angle au centre est égale au double de l'angle dont le sommet est situé sur la circonférence de ce cercle $\left(2.\widehat{M'A'M} = 2\alpha\right)$. $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire circulaire au point M .



(a)



(b)

De la figure (b), il vient :

$$\vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r \Rightarrow v_e = \sqrt{v_a^2 + v_r^2 - 2v_a.v_r.\cos\alpha}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_e = \sqrt{4R^2\omega^2\sin^2\dfrac{\omega t}{2} + R^2\omega^2 - 2R\omega.2R\omega\sin\dfrac{\omega t}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\omega t}{2}\right)} \\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\omega t}{2}\right) = \sin\dfrac{\omega t}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v_e = R\omega = v}$$

La vitesse d'entraînement est égale à la vitesse de translation du centre du cercle par rapport au repère fixe XOY , ce qui est tout à fait logique. $\vec{v}_e$ est parallèle à l'axe OX .

Exercice 4.33

1/ Nous partant du vecteur position en coordonnées polaires dans le repère $X'O'Y'$:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = \vec{r} = \vec{r}\,' = r.\vec{u}_r \\ r = r_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{r} = r_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right).\vec{u}_r}$$

La vitesse relative : dans le repère mobile, le vecteur unitaire $\vec{u}$ est constant.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r = \dot{r}.\vec{u}_r \\ r = r_0\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right) \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v}_r = r_0\omega\left(-\sin\omega t + \cos\omega t\right).\vec{u}_r}$$

Pour calculer la vitesse d'entraînement, nous faisons intervenir le vecteur de rotation $\vec{\omega}$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_e = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} \\ \overrightarrow{OO'} = \vec{0} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v}_e = \vec{\omega}\wedge\vec{r}}$$

Nous effectuons l'opération suivante :

$$\vec{v}_e = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_e = r_0\omega\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)\vec{u}_\theta}$$

En utilisant la loi de composition des vitesses, on peut en déduire la vitesse absolue :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow \boxed{\vec{v}_a = r_0\omega\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)\vec{u}_\theta + r_0\omega\left(-\sin\omega t + \cos\omega t\right).\vec{u}_r}$$

Calculons le module de cette vitesse pour vérifier q'il est constant :

$$\boxed{v_a = r_0\omega\sqrt{2} = Cte}$$

Quant à la valeur relative :

$$\vec{a}_r = \ddot{r}.\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{a}_r = r_0\omega^2\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right).\vec{u}_r}$$

L'accélération d'entraînement est déduite de l'expression générale vue en cours en éliminant les termes nuls :

$$\vec{a}_e = \underbrace{\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}}_{0} + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}}_{0} \quad \Rightarrow \boxed{\vec{a}_e = \vec{\omega}\wedge\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'}$$

Calculons le produit vectoriel double :

$$\vec{v}_e = \vec{\omega}\wedge r' = \vec{\omega}\wedge r = r_0\omega\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right).\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_e = \omega\wedge r_0\omega\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)$$

$$\vec{a}_e = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & r_0\omega\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right) & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_e = -r_0\omega^2\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right)\vec{u}_\theta}$$

Calculons à présent l'accélération complémentaire en appliquant la formule :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2.\begin{vmatrix} \vec{u}_r & -\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ r_0\omega(-\sin\omega t + \cos\omega t) & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = 2r_0\omega^2(-\sin\omega t + \cos\omega t)\vec{u}_\theta}$$

Nous en déduisons l'accélération absolue à partir de la loi de composition des accélérations : $\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$

Après les calculs nécessaires on trouve l'expression de l'accélération absolue :

$$\boxed{\vec{a}_a = 2r_0\omega^2\left[(\cos\omega t + \sin\omega t)\vec{u}_r + (-\sin\omega t + \cos\omega t)\vec{u}_\theta\right]}$$

Vérifions que son module est constant :

$$\boxed{\left|\vec{a}_a\right| = 2r_0\omega^2\sqrt{2} = Cte}$$

Exercice 4.35 :

1/ Le vecteur position de la mouche dans le repère mobile (aiguille) :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r \Rightarrow \boxed{\vec{r} = v.t..\vec{u}_r}$$

Les expressions de la vitesse et de l'accélération de la mouche dans le repère mobile : remarquons que $\theta \prec 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \omega \prec 0$, ceci est du au sens négatif dans lequel progresse l'aiguille des secondes.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_M = \dot{\vec{r}} = v.\vec{u}_r + vt.\dot{\vec{u}}_r \\ \dot{\vec{u}}_r = (-\omega).\vec{u}_\theta \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{v}_M = v.\vec{u}_r - vt|\omega|.\vec{u}_\theta}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}_M = \ddot{\vec{r}} = v.\dot{\vec{u}}_r - v|\omega|.\vec{u}_\theta - vt|\omega|.\dot{\vec{u}}_\theta \\ \dot{\vec{u}}_\theta = -(-\omega).\vec{u}_r \ , \ \dot{\vec{u}}_r = (-\omega).\vec{u}_\theta \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\vec{a}_M = -v\omega^2 t.\vec{u}_r - 2v|\omega|.\vec{u}_\theta}$$

2/ Calcul des coordonnées θ_M, x_M, y_M. Consignons les résultats dans le tableau suivant :

$$v = \frac{0,2}{60} = \frac{10^{-2}}{3}(m/s) \ ; \ \omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}(rad/s)$$

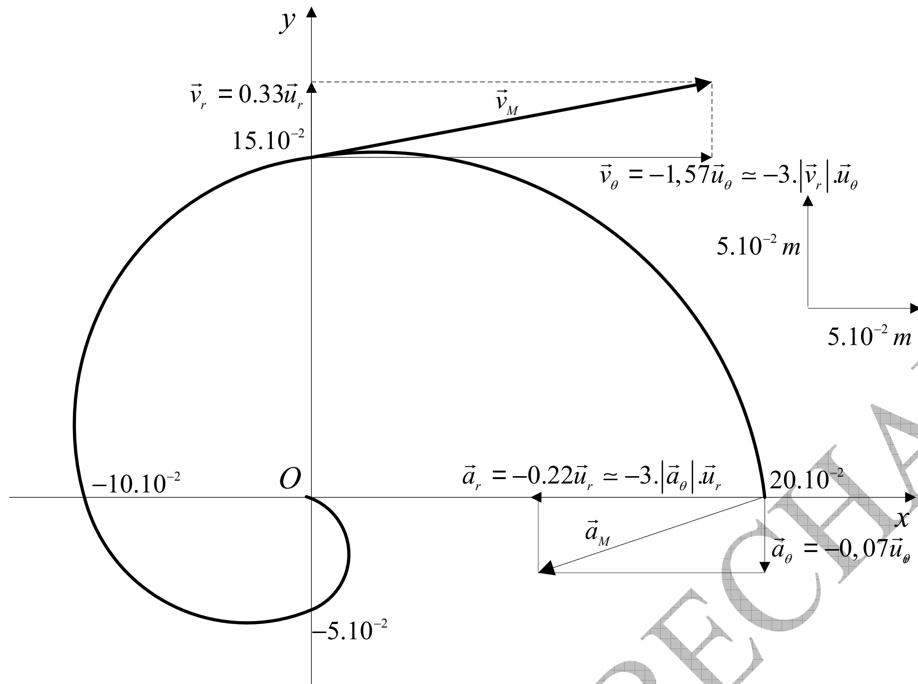
$$x_M = vt\cos\omega t = \frac{10^{-2}}{3}.t\cos\frac{\pi}{30}.t \ ; \ y_M = vt\sin\omega t = \frac{10^{-2}}{3}.t\cos\frac{\pi}{30}.t$$

$t(s)$	0	15	30	45	60
$\theta_M = -\omega t \ (rad.s^{-1})$	0	$-\pi/2$	$-\pi$	$-3\pi/2$	-2π
$r_M = vt \ (ms^{-1})$	0	-5.10^{-2}	10.10^{-2}	15.10^{-2}	20.10^{-2}
$x_M(m)$	0	0	-10.10^{-2}	0	20.10^{-2}
$y_M(m)$	0	-5.10^{-2}	0	15.10^{-2}	0

Voir la représentation graphique c-dessous.

3/ Pour représenter la vitesse et l'accélération de la mouche par rapport au repère mobile, il faut calculer d'abord leurs deux modules respectifs aux temps prescrits :

$t = 45s$: $v_M = v.\vec{u}_r - v.t.\omega.\vec{u}_\theta$ $\vec{v}_r = 0,33.\vec{u}_r \ ; \ \vec{v}_\theta = -1,57.\vec{u}_\theta$	t = 60s: $\vec{a}_M = -v\omega^2 t..\vec{u}_r - 2v\omega.\vec{u}_\theta$ $\vec{a}_r = -0,22.\vec{u}_r \ ; \ \vec{a}_\theta = -,07.\vec{u}_\theta$



Nous avons pris comme échelles le module de la vitesse radiale pour représenter la vitesse ; et le module de l'accélération transversale pour représenter l'accélération.

Exercice 4.36 :

1/ A partir de la figure ci-dessous, on écrit l'expression du vecteur position dans le repère fixe OXY :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

Durant le temps t , l'angle balayé par le point A par rapport au repère fixe est $\theta = \omega t$.

L'angle que balaie le point M durant le même temps t par rapport au repère mobile $O'X'Y'$ est égale aussi à $\theta = \omega t$, mais par rapport au repère fixe OXY il balaie l'angle $2\theta = 2\omega t$.

La vitesse et l'accélération du point par rapport au repère sont la vitesse et l'accélération absolues.

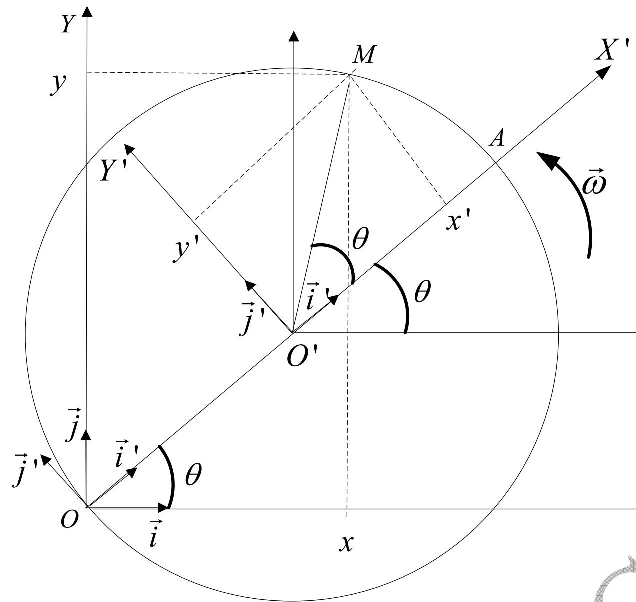
En se basant sur la figure ci-dessous :

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OO'} = R\cos\omega t.\vec{i} + R\sin\omega t.\vec{j}\\ \overrightarrow{O'M} = R\cos 2\omega t.\vec{i} + R\sin 2\omega t.\vec{j}\end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \left(R\cos\omega t + R\cos 2\omega t\right)\vec{i} + \left(R\sin\omega t + R\sin 2\omega t\right)\vec{j}}$$

Par dérivations successives de $\overrightarrow{OM}$ on obtient la vitesse et l'accélération absolues :

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \;,\; \boxed{\vec{v}_a = -R\omega\left(\sin\omega t + 2\sin 2\omega t\right)\vec{i} + R\omega\left(\cos\omega t + 2\cos 2\omega t\right)\vec{j}} \rightarrow (1)$$

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} \;,\; \boxed{\vec{a}_a = -R\omega^2\left(\cos\omega t + 4\cos 2\omega t\right)\vec{i} - R\omega^2\left(\sin\omega t + 4\sin 2\omega t\right)\vec{j}} \rightarrow (2)$$



2/ Ecrivons l'expression du vecteur position dans le repère mobile $O'X'Y'$ en exploitant la figure ci-dessus :

$$\boxed{\overrightarrow{O'M} = x'.\vec{i}\,' + y'.\vec{j}\,' = R\left(\cos\omega t.\vec{i}\,' + \sin\omega t.\vec{j}\,'\right)}$$

La vitesse et l'accélération du point M par rapport au repère mobile $O'X'Y'$ sont la vitesse et l'accélération relatives. En dérivant le vecteur $\overrightarrow{O'M}$ deux fois successives on obtient la vitesse et l'accélération relatives :

$$\vec{v}_{r'} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \quad , \quad \boxed{\vec{v}_{r'} = R\omega\left(-\sin\omega t.\vec{i}\,' + \cos\omega t.\vec{j}\,'\right)}$$

$$\vec{a}_{r'} = \frac{d\vec{v}_{r'}}{dt} \quad , \quad \boxed{\vec{a}_{r'} = -R\omega^2\left(\cos\omega t.\vec{i}\,' + \sin\omega t.\vec{j}\,'\right)}$$

Ecrivons maintenant l'expression du vecteur position dans le repère fixe $O'XY$ à partir de la figure ci-dessus :

$$\boxed{\overrightarrow{O'M} = x.\vec{i} + y.\vec{j} = R\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t\vec{j}\right)}$$

La vitesse et l'accélération par rapport au repère OXY **.**

<u>ATTENTION</u> : il ne faut pas dériver deux fois de suite le vecteur $\overrightarrow{O'M}$ afin d'obtenir la vitesse et l'accélération relatives par rapport à OXY . C'est cette erreur répondue qu'on doit éviter !!

Nous devons faire appel à la relation 4.57 (voir cours)

$$\underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}_{\vec{v}_a} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}\,'}{dt}}_{\vec{v}_e} + \underbrace{\vec{i}\,'\frac{dx'}{dt} + \vec{j}\,'\frac{dy'}{dt} + \vec{k}\,'\frac{dz'}{dt}}_{\vec{v}_r}$$

$$\vec{v}_r = \vec{i}\,'\frac{dx'}{dt} + \vec{j}\,'\frac{dy'}{dt} + \vec{k}\,'\underbrace{\frac{dz'}{dt}}_{0}$$

A partir de la figure nous pouvons désigner :

$$\vec{i}\,' = \cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j} \quad ; \quad x' = R\cos\omega t \rightarrow \dot{x}' = -R\omega\sin\omega t$$

$$\vec{j}\,' = -\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j} \;\; ; \;\; y' = R\sin\omega t \rightarrow \dot{y}' = R\omega\cos\omega t$$

Après substitution, nous obtenons :

$$\vec{v}_r = \left(\cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j}\right).\left(-R\omega\sin\omega t\right) + \left(-\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j}\right)\left(R\omega\cos\omega t\right)$$

$$\vec{v}_r = -2R\omega.\underbrace{\sin\omega t.\cos\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t}.\vec{i} + R\omega\left(\underbrace{-\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}_{\cos 2\omega t}\right)\vec{j}$$

A la fin, la vitesse relative du mobile M par rapport à OXY est :

$$\boxed{\vec{v}_r = R\omega\left(-\sin 2\omega t.\vec{i} + \cos 2\omega t.\vec{j}\right)} \rightarrow (3)$$

L'accélération relative du mobile M par rapport à OXY n'est pas égale à la dérivée de $\vec{v}$ par rapport au temps. Il faut utiliser la relation 4.59 (voir cours).

$$\vec{a}_r = \vec{i}\,'\frac{d^2x'}{dt^2} + \vec{j}\,'\frac{d^2y'}{dt^2} + \vec{k}\,'\underbrace{\frac{d^2z'}{dt^2}}_{0}$$

$$\vec{i}\,' = \cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j} \quad ; \quad x' = R\cos\omega t \rightarrow \ddot{x}' = -R\omega^2\cos\omega t$$

$$\vec{j}\,' = -\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j} \; ; \; y' = R\sin\omega t \rightarrow \ddot{y}' = -R\omega^2\sin\omega t$$

En remplaçant on obtient :

$$\vec{a}_r = \left(\cos\omega t.\vec{i} + \sin\omega t.\vec{j}\right)\left(-R\omega^2\cos\omega t\right) + \left(-\sin\omega t.\vec{i} + \cos\omega t.\vec{j}\right)\left(-R\omega^2\sin\omega t\right)$$

$$\vec{a}_r = \left(-R\omega^2\cos^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2\cos\omega t\sin\omega t.\vec{j}\right) + \left(R\omega^2\sin^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2\cos\omega t\sin\omega t.\vec{j}\right)$$

$$\vec{a}_r = -R\omega^2\left(\underbrace{\cos^2\omega t - \sin^2\omega t}_{\cos 2\omega t}\right).\vec{i} - R\omega^2\,2\underbrace{\cos\omega t\sin\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t}.\vec{j}$$

A la fin l'accélération relative du mobile M par rapport à OXY est égale à :

$$\boxed{\vec{a}_r = -R\omega^2\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t.\vec{j}\right)} \rightarrow (4)$$

3/ a/ La vitesse d'entraînement, en utilisant la loi de composition des vitesses est :

$$(1) - (3) = \vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r$$

$$\vec{v}_e = \left[-R\omega\left(\sin\omega t + 2\sin 2\omega t\right)\vec{i} + R\omega\left(\cos\omega t + 2\cos 2\omega t\right)\vec{j}\;\right] - \left[R\omega\left(-\sin 2\omega t.\vec{i} + \cos 2\omega t.\vec{j}\right)\right]$$

$$\boxed{\vec{v}_e = -R\omega\left(\sin\omega t + \sin 2\omega t\right).\vec{i} + R\omega\left(\cos\omega t + \cos 2\omega t\right).\vec{j}}$$

b/ L'accélération relative en appliquant la loi de composition des accélérations est :

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\underbrace{\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}}_{0}$$

$$\overrightarrow{OO'} = R.\cos\omega t.\vec{i} + R\sin\omega t.\vec{j} \quad , \quad \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = -R\omega^2.\cos\omega t.\vec{i} - R\omega^2\sin\omega t.\vec{j}$$

$$\ddot{\vec{i}}\,' = -\omega^2\cos\omega t.\vec{i} - \omega^2\sin\omega t.\vec{j} \quad ; \quad x' = R\cos\omega t$$

$$\ddot{\vec{j}}\,' = \omega^2\sin\omega t.\vec{i} - \omega^2 c\,os\,\omega t.\vec{j} \; ; \qquad y' = R\sin\omega t$$

En remplaçant on obtient :

$$\vec{a}_e = \left(-R\omega^2.\cos\omega t.\vec{i} - R\omega^2\sin\omega t.\vec{j}\right) + R\cos\omega t\left(-\omega^2\cos\omega t.\vec{i} - \omega^2\sin\omega t.\vec{j}\right) +$$

$$R\sin\omega t\left(\omega^2\sin\omega t.\vec{i} - \omega^2 c\,os\,\omega t.\vec{j}\right)$$

D'où l'accélération d'entraînement du mobile M :

$$\vec{a}_e = \left[-R\omega^2.\cos\omega t - R\omega^2 \left(\underbrace{-\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}_{\cos 2\omega t} \right) \right] \vec{i} - R\omega^2 \left(\sin\omega t + 2\underbrace{\sin\omega t.c\,os\,\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t} \right) \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_e = -R\omega^2.\left(\cos\omega t + \cos 2\omega t\right)\vec{i} - R\omega^2\left(\sin\omega t + \sin 2\omega t\right)\vec{j}}$$

Déduction de l'accélération de Coriolis ou accélération complémentaire :

$$\vec{a}_c = 2\left[\frac{dx'.d\vec{i}\,'}{dt^2} + \frac{dy'.d\vec{j}\,'}{dt^2} \right]$$

ou à partir de la relation 4.59 :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_r + \vec{a}_c \Rightarrow \boxed{\vec{a}_c = +\vec{a}_a - \vec{a}_r - \vec{a}_r}$$

Le résultat est le même.

$\dot{\vec{i}}\,' = -\omega\sin\omega t.\vec{i} + \omega\cos\omega t.\vec{j}$; $\dot{x}' = -R\omega\sin\omega t$

$\dot{\vec{j}}\,' = -\omega\cos\omega t.\vec{i} - \omega\sin\omega t.\vec{j}$; $\dot{y}' = R\omega\cos\omega t$

$$\vec{a}_c = 2\left[\frac{dx'.d\vec{i}\,'}{dt^2} + \frac{dy'.d\vec{j}\,'}{dt^2} \right] = \vec{a}_r + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_c = 2\left[-R\omega\sin\omega t\left(-\omega\sin\omega t.\vec{i} + \omega\cos\omega t.\vec{j}\right) + R\omega\cos\omega t\left(-\omega\cos\omega t.\vec{i} - \omega\sin\omega t.\vec{j}\right) \right]$$

$$\vec{a}_c = 2\left[R\omega^2.\sin^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2.\sin\omega t\cos\omega t.\vec{j} - R\omega^2.\cos^2\omega t.\vec{i} - R\omega^2.\cos\omega t\sin\omega t.\vec{j} \right]$$

$$\vec{a}_c = 2\left[R\omega^2.\left(\underbrace{\sin^2\omega t - \cos^2\omega t}_{-\cos\omega t} \right).\vec{i} - 2R\omega^2.\underbrace{\sin\omega t\cos\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t}.\vec{j} \right]$$

$$\boxed{\vec{a}_c = -2R\omega^2\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t.\vec{j}\right)}$$

Il faudra vérifier le résultat par le calcul direct $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_r + \vec{a}_c$

4/ Introduisons à présent le vecteur de rotation $\vec{\omega} = \omega.\vec{k}$. nous utilisons la loi(4.72) démontrée en cours pour calculer les deux composantes de la vitesse d'entraînement :

$$\boxed{\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

$$\vec{v}_e = -R\omega.\sin\omega t.\vec{i} + R\omega.\cos\omega t.\vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ R\cos 2\omega t & R\sin 2\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_e = -R\omega.\sin\omega t.\vec{i} + R\omega.\cos\omega t.\vec{j} - R\omega.\sin 2\omega t.\vec{i} + R\omega.\sin 2\omega t.\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{v}_e = -R\omega.\left(\sin\omega t + \sin 2\omega t\right).\vec{i} + R\omega.\left(\cos\omega t + \sin 2\omega t\right).\vec{j}}$$

Nous utilisons la formule (4.73) démontrée en cours pour trouver l'accélération complémentaire ou accélération d Coriolis :

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r \Rightarrow \vec{a}_c = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -R\omega.\sin 2\omega t & R\omega.\cos 2\omega t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}_c = -2R\omega^2.\cos 2\omega t.\vec{i} - 2R\omega^2.\sin 2\omega t.\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{a}_c = -2R\omega^2.\left(\cos 2\omega t.\vec{i} + \sin 2\omega t.\vec{j}\right)}$$